

Approximative Kompaktheit verallgemeinerter rationaler Funktionen

JÖRG BLATTER

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn, Bonn, Deutschland

Eine nichtleere Teilmenge A eines reellen Banach-Raumes B heißt nach Efimov und Stechkin [4] approximativ kompakt, wenn für jedes b in B jede Folge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ mit $\|b - a_n\| \rightarrow \inf\{\|b - a\| : a \in A\}$ ¹ eine Teilfolge enthält, die gegen ein Element von A konvergiert. Man zeigt leicht, daß eine approximativ kompakte Teilmenge eines reellen Banach-Raumes Existenzmenge² ist und daß die zugehörige mengenwertige metrische Projektion stetig von oben ist³ (vgl. Singer [8], der ausführlich auf die Bedeutung des Begriffs der approximativen Kompaktheit eingeht).

Für die Konstruktion von Verfahren zur numerischen Behandlung des Problems der besten Approximation von Elementen eines reellen Banach-Raumes B durch Elemente einer nichtleeren Teilmenge A von B ist es von großer Bedeutung, zu wissen, ob die Menge A approximativ kompakt ist. In sehr vielen—wenn nicht in allen—bekannten Verfahren zur Konstruktion eines Elementes bester Approximation in A zu einem vorgegebenen Element b von B wird nämlich zunächst eine Minimalfolge für b in A konstruiert, von der dann auf die eine oder andere Weise gezeigt wird, daß sie eine Teilfolge enthält, die gegen das gesuchte Element bester Approximation konvergiert. Weiß man nun aber, daß die Menge A approximativ kompakt ist, so weiß man *a priori*, daß jede Minimalfolge in A für ein vorgegebenes Element b von B eine konvergente Teilfolge enthält, deren Limes ein Element bester Approximation für b in A ist.

Die folgenden Voraussetzungen gelten für die ganze Arbeit. Maßtheoretische Begriffe und Bezeichnungen werden stets im Sinne von Dunford und Schwartz [3] verstanden. Alle auftretenden Funktionen seien reellwertig. Zwischen

¹ Eine solche Folge heißt Minimalfolge für b in A .

² Siehe unten.

³ Das nach dieser Bemerkung mit dem Problem der approximativen Kompaktheit eng verknüpfte Problem der Stetigkeit von metrischen Projektionen ist für den Fall der besten Approximation in reellen Banach-Räumen vom Typ $C(X)$ durch verallgemeinerte rationale Funktionen von einer Reihe von Autoren behandelt worden, allerdings stets unter der—hier grundsätzlich nicht gemachten—Voraussetzung der eindeutigen Lösbarkeit des Approximationsproblems (vgl. hierzu Cheney und Loeb [2] und Werner [9], der die Bedeutung dieses Problems für numerische Verfahren behandelt).

Funktionen und Äquivalenzklassen von Funktionen bezüglich eines Maßes wird, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, nicht unterschieden.

X sei ein kompakter Hausdorff-Raum und μ sei ein positives Maß aus $rca(X)$ mit $\text{supp}(\mu) = X$.⁴ P und Q seien endlich-dimensionale Teilräume des reellen Banach-Raumes $C(X)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X , ausgestattet mit der sup-Norm. Es sei $\dim Q \geq 1$. $S(Q)$ bezeichne die Einheitskugel von Q , i.e. die Menge $\{q \in Q : \sup\{|q(x)| : x \in X\} = 1\}$. $P \times S(Q)$ bezeichne den vollständigen metrischen Raum aller Paare (p, q) mit $p \in P$, $q \in S(Q)$, ausgestattet mit der Metrik

$$d((p, q), (p', q')) := \sup\{\sup\{|p(x) - p'(x)| : x \in X\}, \\ \sup\{|q(x) - q'(x)| : x \in X\}\}.$$

Es gelte $\mu(q^{-1}(0)) = 0$ für jedes $q \in S(Q)$.

$M(X, \mu)$ bezeichne den vollständigen reellen metrischen linearen Raum aller reellwertigen, μ -meßbaren Funktionen (mod μ !) auf X , ausgestattet mit der Metrik

$$d_\mu(f, g) := \inf\{\epsilon + \mu\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \epsilon\}\}.$$

τ bezeichne die Abbildung von $P \times S(Q)$ in $M(X, \mu)$, die jedem Paar (p, q) das Element $\tau(p, q)$ von $M(X, \mu)$ zuordnet, das durch

$$\tau(p, q)(x) := p(x)/q(x)$$

für $x \in X \setminus q^{-1}(0)$ wohldefiniert ist (man beachte, daß $\mu(q^{-1}(0)) = 0$ für jedes $q \in S(Q)$). Die Elemente von $\tau(P \times S(Q))$ heißen aus naheliegenden Gründen verallgemeinerte rationale Funktionen.

Sei $1 \leq \alpha \leq \infty$. Die Menge R_α sei definiert durch

$$R_\alpha := \tau(P \times S(Q)) \cap L_\alpha(X, \mu).$$

Die übliche Norm des reellen Banach-Raumes $L_\alpha(X, \mu)$ wird mit $\|\cdot\|_\alpha$ bezeichnet. Für jedes $f \in L_\alpha(X, \mu)$ sei der Abstand $\varphi_\alpha(f)$ von f zu R_α bzw. die Menge $\phi_\alpha(f)$ der Elemente bester Approximation von f in R_α definiert durch

$$\varphi_\alpha(f) := \inf\{\|f - r\|_\alpha : r \in R_\alpha\} \\ \phi_\alpha(f) := \{r \in R_\alpha : \|f - r\|_\alpha = \varphi_\alpha(f)\}$$

Die Menge R_α heiße E- bzw. U- bzw. EU-Teilmenge⁵ von $L_\alpha(X, \mu)$, wenn für jedes $f \in L_\alpha(X, \mu)$ die Menge $\phi_\alpha(f)$ mindestens ein bzw. höchstens ein bzw. genau ein Element enthält.

⁴ $\text{supp}(\mu)$ bezeichnet den Träger des Maßes μ .

⁵ E- bzw. EU-Mengen heißen in der Literatur oft Existenz- bzw. Chebychev-Mengen.

Wegen $\text{supp}(\mu) = X$ ist $C(X)$ in kanonischer Weise linear und isometrisch in $L_\infty(X, \mu)$ eingebettet. Wegen $\mu(q^{-1}(0)) = 0$ für jedes $q \in S(Q)$ ist $\text{supp}(q) := \overline{X \setminus q^{-1}(0)} = X$ für jedes $q \in S(Q)$. Mit Hilfe dieser Überlegungen kann man aus späteren Aussagen über die Approximation von Elementen von $L_\infty(X, \mu)$ durch Elemente von R_∞ Ergebnisse von Newman und Shapiro [6] und von Boehm [1] ableiten.

Es sei noch das für einige spätere Überlegungen nützliche Diagramm von sämtlich stetigen Inclusionsabbildungen erwähnt:

$$\begin{array}{ccccccccc} M(X, \mu) & \supset & L_1(X, \mu) & \supset & L_\alpha(X, \mu) & \supset & L_\beta(X, \mu) & \supset & L_\infty(X, \mu) & \supset & C(X) \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ \tau(P \times S(Q)) & \supset & R_1 & \supset & R_\alpha & \supset & R_\beta & \supset & R_\infty & & \\ & & & & & & & & & & 1 \leq \alpha \leq \beta \leq \infty. \end{array}$$

LEMMA 1. (i) Sei $\{(p_n, q_n) : n \in N\}$ eine konvergente Folge in $P \times S(Q)$ mit dem Limes (p, q) . Dann gilt

$$\sup \left\{ \left| \frac{p_n(x)}{q_n(x)} - \frac{p(x)}{q(x)} \right| : x \in A \right\} \rightarrow 0$$

für jede abgeschlossene Teilmenge A von X , die in

$$X \setminus (q^{-1}(0) \cup \bigcup_{n \in N} q_n^{-1}(0))$$

liegt.

(ii) Sei $1 \leq \alpha \leq \infty$ und sei $\{r_n = \tau(p_n, q_n) : n \in N\} \subset R_\alpha$ eine beschränkte Folge in $L_\alpha(X, \mu)$. Dann gibt es ein $r = \tau(p, q) \in R_\alpha$ und eine Teilfolge $\{r_{n_i} = \tau(p_{n_i}, q_{n_i}) : i \in N\}$ so, daß die Folge $\{(p_{n_i}, q_{n_i}) : i \in N\}$ in $P \times S(Q)$ gegen (p, q) konvergiert und so, daß für jedes $f \in L_\alpha(X, \mu)$

$$\|f - r\|_\alpha \leq \limsup \{\|f - r_n\|_\alpha : n \in N\}.$$

Beweis. ad (i): Sei $\delta := \inf\{|q(x)| : x \in A\}$. Dann ist $\delta > 0$ und wegen $(p_n, q_n) \rightarrow (p, q)$ in $P \times S(Q)$ gibt es ein $n_0 \in N$ so, daß $\inf\{|q_n(x)| : x \in A\} \geq \frac{1}{2}\delta$ für jedes $n \geq n_0$. Daher ist für jedes $n \geq n_0$ und für jedes $x \in A$

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_n(x)}{q_n(x)} - \frac{p(x)}{q(x)} \right| &= \frac{1}{|q_n(x)q(x)|} |p_n(x)q(x) - p(x)q_n(x)| \\ &\leq \frac{2}{\delta^2} (\|p_n - p\|_\infty \|q\|_\infty + \|p\|_\infty \|q_n - q\|_\infty) \end{aligned}$$

und daraus liest man die Behauptung ab.

ad (ii): Da die Folge $\{r_n = \tau(p_n, q_n) : n \in N\}$ beschränkt ist in $L_\alpha(X, \mu)$ und da für jedes $n \in N$

$$\begin{aligned} \|p_n\|_\alpha &\leq \|p_n - r_n q_n\|_\alpha + \|r_n q_n\|_\alpha = \|r_n q_n\|_\alpha \\ &\leq \|r_n\|_\alpha \|q_n\|_\infty = \|r_n\|_\alpha, \end{aligned}$$

ist die Folge $\{\|p_n\|_\alpha : n \in N\}$ beschränkt. Da auf dem endlich-dimensionalen Banach-Raum P alle Normen äquivalent sind, ist also auch die Folge $\{\|p_n\|_x : n \in N\}$ beschränkt. Die Folge $\{(p_n, q_n) : n \in N\}$ ist also beschränkt in $P \times S(Q)$ und hat daher eine Teilfolge $\{(p_{n_i}, q_{n_i}) : i \in N\}$, die in $P \times S(Q)$ gegen ein $(p, q) \in P \times S(Q)$ konvergiert. Sei nun $f \in L_\alpha(X, \mu)$ und sei

$$E_k := \left\{ x \in X : |q(x)| \geq \frac{1}{k} \right\} \setminus \bigcup_{n \in N} q_n^{-1}(0)$$

für $k \in N$. Dann liegt die Folge $\{|f - r| \chi_{E_k} : k \in N\}$ in $L_\alpha(X, \mu)$ und konvergiert μ -fast überall und monoton zunehmend gegen die Funktion $|f - r|$. Da weiter für $i, k \in N$

$$\begin{aligned} \|(f - r) \chi_{E_k}\|_\alpha &\leq \|(f - r_{n_i}) \chi_{E_k}\|_\alpha + \|(r_{n_i} - r) \chi_{E_k}\|_\alpha \leq \|f - r_{n_i}\|_\alpha \\ &\quad + \|(r_{n_i} - r) \chi_{E_k}\|_\alpha \end{aligned}$$

und da wegen (i) $\|(r_{n_i} - r) \chi_{E_k}\|_\alpha \rightarrow 0$ für jedes $k \in N$, ist $|f - r| \in L_\alpha(X, \mu)$ und daher auch $r \in L_\alpha(X, \mu)$ und es gilt

$$\|f - r\|_\alpha \leq \limsup \{\|f - r_{n_i}\|_\alpha : n \in N\}.$$

SATZ 2. Die Abbildung τ ist eine stetige Abbildung des metrischen Raumes $P \times S(Q)$ in den metrischen Raum $M(X, \mu)$.

Beweis. Sei $\{(p_n, q_n) : n \in N\}$ eine konvergente Folge in $P \times S(Q)$ mit dem Limes (p, q) . Da

$$N := q^{-1}(0) \cup \bigcup_{n \in N} q_n^{-1}(0)$$

eine μ -Nullmenge ist und da μ regulär ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Teilmenge E von X mit $N \subset E$ und $\mu(E) < \epsilon$. Mit Lemma 1 (i) folgt hieraus, daß die Folge $\{\tau(p_n, q_n) : n \in N\}$ μ -gleichmäßig, und daher insbesondere in $M(X, \mu)$, gegen $\tau(p, q)$ konvergiert.

Zu den folgenden beiden Sätzen vgl. Efimov und Stechkin [4].

SATZ 3. Die Menge R_α ist schwach folgenabgeschlossen in $L_\alpha(X, \mu)$ für $1 < \alpha < \infty$.

Beweis. Die Folge $\{r_n = \tau(p_n, q_n) : n \in N\} \subset R_\alpha$ konvergiere schwach in $L_\alpha(X, \mu)$ gegen $f \in L_\alpha(X, \mu)$. Dann ist $\{r_n : n \in N\}$ beschränkt in $L_\alpha(X, \mu)$ und daher gibt es nach Lemma 1 (ii) ein $r = \tau(p, q) \in R_\alpha$ und ein Teilfolge $\{r_{n_i} = \tau(p_{n_i}, q_{n_i}) : i \in N\}$ so, daß die Folge $\{(p_{n_i}, q_{n_i}) : i \in N\}$ in $P \times S(Q)$ gegen (p, q) konvergiert. Sei nun

$$E_k := \left\{ x \in X : |q(x)| \geq \frac{1}{k} \right\} \setminus \bigcup_{n \in N} q_n^{-1}(0)$$

für $k \in N$ und sei $g := \operatorname{sgn}(f - r) \in L_\infty(X, \mu)$. Dann liegt die Folge $\{|f - r| \chi_{E_k} : k \in N\}$ in $L_\alpha(X, \mu)$ und konvergiert μ -fast überall und monoton zunehmend gegen die Funktion $|f - r|$. Für jedes $k \in N$ konvergiert die Folge

$$\left\{ \int_X (r_{n_i}(x) - r(x)) g(x) \chi_{E_k}(x) \mu(dx) : i \in N \right\}$$

nach Lemma 1 (i) gegen Null und sie konvergiert gegen

$$\int_X (f(x) - r(x)) g(x) \chi_{E_k}(x) \mu(dx),$$

da die Folge $\{r_{n_i} : i \in N\}$ schwach gegen f konvergiert und da $g \chi_{E_k} \in L_\infty(X, \mu)$. Also ist

$$0 = \int_X (f(x) - r(x)) g(x) \chi_{E_k}(x) \mu(dx) = \int_X |f(x) - r(x)| \chi_{E_k}(x) \mu(dx)$$

für jedes $k \in N$ und daher ist auch

$$\int_X |f(x) - r(x)| \mu(dx) = 0,$$

i.e. $f = r \in R_\alpha$.

Da $L_\alpha(X, \mu)$ für $1 < \alpha < \infty$ ein uniform konvexer Banach-Raum ist und da eine schwach folgenabgeschlossene Teilmenge eines uniform konvexen Banach-Raumes approximativ kompakt ist (Efimov und Stechkin [4]), folgt aus Satz 3.

SATZ 4. Die Menge R_α ist eine approximativ kompakte Teilmenge von $L_\alpha(X, \mu)$ für $1 < \alpha < \infty$.

Bemerkung. Da eine approximativ kompakte EU-Teilmenge eines uniform konvexen Banach-Raumes konvex ist (Efimov und Stechkin [4]) und da die Menge R_α im allgemeinen nicht konvex ist, folgt aus Satz 4, daß die Menge R_α im allgemeinen keine EU-Teilmenge von $L_\alpha(X, \mu)$ ist.

Aus Lemma 1, Satz 1 folgt unmittelbar

SATZ 5. Sei $\alpha \in \{1, \infty\}$. Ist $f \in L_\alpha(X, \mu)$ und $\{r_n : n \in N\} \subset R_\alpha$ eine Minimalfolge für f in R_α , so gibt es eine Teilfolge $\{r_{n_i} : i \in N\}$ und ein $r \in \phi_\alpha(f)$ so, daß $r_{n_i} \rightarrow r$ in $M(X, \mu)$.

Bemerkung. Satz 5 impliziert insbesondere, daß R_1 bzw. R_∞ eine E-Teilmenge von $L_1(X, \mu)$ bzw. $L_\infty(X, \mu)$ ist (vgl. Newman und Shapiro [6] und Boehm [1]).

Das folgende Beispiel illustriert die Aussage von Satz 5 für $\alpha = \infty$. Sei X das kompakte Intervall $[0, 1]$ und sei μ das gewöhnliche Lebesgue-Maß auf

$[0, 1]$. Die Elemente $g_1, g_2 \in C(X)$ seien definiert durch $g_1(x) = 1, g_2(x) = x$ für $x \in X$ und es sei $P = \{ag_2 : a \in \mathbf{R}\}, Q = \{ag_1 + bg_2 : a, b \in \mathbf{R}\}$. Dann ist

$$R_\infty = \{ag_1 : a \in \mathbf{R}\} \cup \{ag_2 : a \in \mathbf{R}\} \cup \left\{ \frac{ag_2}{g_1 - bg_2} : a, b \in \mathbf{R}, 0 < b < 1 \right\} \\ \cup \left\{ \frac{ag_2}{bg_1 + (1-b)g_2} : a, b \in \mathbf{R}, 0 < b < 1 \right\}.$$

Insbesondere ist $R_\infty \subset C(X)$. Seien nun $f_1, f_2 \in C(X)$ definiert durch

$$f_1(x) := \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - 4x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \\ f_2(x) := \begin{cases} 2 - 4x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2 + 4x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_\infty(f_1) = \varphi_\infty(f_2) = 1$ und $\phi_\infty(f_1) = \phi_\infty(f_2) = \{g_1\}$.

Obwohl nun f_1 and f_2 denselben Abstand von R_∞ und dasselbe, einzige, Element bester Approximation in R_∞ haben, ist das Stetigkeitsverhalten der Abbildung ϕ_∞ in den Punkten f_1 und f_2 völlig verschieden, denn einerseits gilt: Die Folge $\{r_n : n \in \mathbf{N}, n \geq 2\} \subset R_\infty$, definiert durch

$$r_n := \frac{g_2}{\frac{1}{n}g_1 + \frac{n-1}{n}g_2}$$

ist eine Minimalfolge für f_1 in R_∞ , aber es gibt keine Teilfolge $\{r_{n_i} : i \in \mathbf{N}\}$ so, daß $\|g_1 - r_{n_i}\| \rightarrow 0$.⁶ Insbesondere ist also R_∞ keine approximativ kompakte Teilmenge von $C(X)$ und daher erst recht nicht von $L_\infty(X, \mu)$. Andererseits aber gilt: Jede Minimalfolge $\{r'_n : n \in \mathbf{N}\} \subset R_\infty$ für f_2 in R_∞ konvergiert in $L_\infty(X, \mu)$ gegen das einzige Element g_1 bester Approximation von f_2 in R_∞ .

Es ist interessant, dieses Beispiel zu vergleichen mit einem Satz von Cheney und Loeb [2; Theorem (A)], in dem ein Problem der besten Approximation in reellen Banachräumen vom Typ $C(X)$ durch verallgemeinerte rationale Funktionen behandelt wird, bei dem das Stetigkeitsverhalten der metrischen Projektion in Punkten mit denselben Elementen bester Approximation dasselbe ist.

Im folgenden Satz wird die Konvergenz des Pólya-Algorithmus (Pólya [7]) für den vorliegenden Fall der Approximation durch verallgemeinerte rationale Funktionen behandelt (vgl. hierzu Krabs [5])

⁶ Man kann leicht eine Folge $\{h_n : n \in \mathbf{N}\} \subset C(X)$ angeben so, daß $\|f_1 - h_n\|_\infty \rightarrow 0$ und $\phi_\infty(h_n) = \{r_n\}$ für $n \in \mathbf{N}$.

SATZ 6. Sei $f \in L_\infty(X, \mu)$, sei $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge reeller Zahlen mit $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \dots$ und $\alpha_n \rightarrow \infty$ und sei $r_{\alpha_n} \in \phi_{\alpha_n}(f)$ für $n \in \mathbb{N}$, i.e. $\|f - r_{\alpha_n}\|_{\alpha_n} = \varphi_{\alpha_n}(f) = \inf\{\|f - r\|_{\alpha_n} : r \in R_\alpha\}$. Dann konvergiert die Folge

$$\{\mu(X)^{-1/\alpha_n} \varphi_{\alpha_n}(f) : n \in \mathbb{N}\}$$

monoton zunehmend gegen $\varphi_\infty(f)$. Ferner gibt es ein $r \in \phi_\infty(f)$ und eine Teilfolge

$$\{r_{\alpha_{n_i}} : i \in \mathbb{N}\}$$

so, daß

$$r_{\alpha_{n_i}} \rightarrow r \text{ in } M(X, \mu).^7$$

Beweis. Es seien zwei leicht zu beweisende Aussagen vorausgeschickt:

(i) Ist $1 \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$, so ist für jedes $g \in L_\beta(X, \mu)$

$$\mu(X)^{-1/\alpha} \|g\|_\alpha \leq \mu(X)^{-1/\beta} \|g\|_\beta.$$

(ii) Ist $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge reeller Zahlen mit $1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots$ und $\beta_n \rightarrow \infty$, so konvergiert für jedes $g \in L_\infty(X, \mu)$ die Folge

$$\{\mu(X)^{-1/\beta_n} \|g\|_{\beta_n} : n \in \mathbb{N}\} \text{ monoton zunehmend gegen } \|g\|_\infty.$$

Aus diesen beiden Aussagen folgt unmittelbar

(iii) Ist $1 \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$, so ist für jedes $g \in L_\alpha(X, \mu)$

$$\mu(X)^{-1/\alpha} \varphi_\alpha(g) \leq \mu(X)^{-1/\beta} \varphi_\beta(g) \leq \varphi_\infty(g).$$

Für den nun folgenden Beweis des Satzes sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha_n = n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zunächst ist wegen (i) und (iii) für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\|f - r_n\|_1 \leq \mu(X)^{1-1/n} \|f - r_n\|_n = \mu(X)^{1-1/n} \varphi_n(f) \leq \mu(X) \varphi_\infty(f),$$

und daher ist die Folge $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subset R_1$ beschränkt in $L_1(X, \mu)$. Nach Lemma 1 (ii) gibt es dann eine Teilfolge $\{r_{n_i} = \tau(p_{n_i}, q_{n_i}^k) : i \in \mathbb{N}\}$ und ein $r = \tau(p, q) \in R_1$ so, daß die Folge $\{(p_{n_i}, q_{n_i}^k) : i \in \mathbb{N}\}$ in $P \times S(Q)$ gegen (p, q) konvergiert. Nach Satz 2 folgt daraus, daß $r_{n_i} \rightarrow r$ in $M(X, \mu)$.

Sei nun

$$E_k := \left\{ x \in X : |q(x)| \geq \frac{1}{k} \right\} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} q^{-1}(0)$$

für $k \in \mathbb{N}$. Dann liegt die Folge $\{|f - r| \chi_{E_k} : k \in \mathbb{N}\}$ in $L_\infty(X, \mu)$ und konvergiert μ -fast überall und monoton zunehmend gegen die Funktion $|f - r|$.

⁷ Dieser Satz sollte natürlich nur dann zur Berechnung von $\varphi_\infty(f)$ bzw. $\phi_\infty(f)$ für Elemente f aus $L_\infty(X, \mu)$ benutzt werden, wenn Verfahren vorliegen, und das scheint für die verallgemeinert rationale Approximation bis heute nicht der Fall zu sein, die es gestatten, $\varphi_\alpha(f)$ bzw. $\phi_\alpha(f)$, $1 < \alpha < \infty$, wesentlich einfacher zu berechnen.

Wegen (i) und (iii) ist für $i, j, k \in N$ mit $j \geq i$

$$\begin{aligned} |(f-r) \chi_{E_k \setminus n_i}| &\leq |(f-r_{n_j}) \chi_{E_k \setminus n_i}| + |(r_{n_j} - r) \chi_{E_k \setminus n_i}| \\ &\leq |f - r_{n_j}| \chi_{E_k \setminus n_i} + |(r_{n_j} - r) \chi_{E_k \setminus n_i}| \\ &\leq \mu(X)^{1/n_i - 1/n_j} |f - r_{n_j}| \chi_{E_k \setminus n_j} + |(r_{n_j} - r) \chi_{E_k \setminus n_i}| \\ &= \mu(X)^{1/n_i - 1/n_j} \varphi_{n_j}(f) + |(r_{n_j} - r) \chi_{E_k \setminus n_i}| \\ &\leq \mu(X)^{1/n_i} \varphi_\infty(f) + |(r_{n_j} - r) \chi_{E_k \setminus n_i}|. \end{aligned}$$

Bildet man in dieser Ungleichung den Limes für $j \rightarrow \infty$ (man beachte (iii)), so folgt, daß für $i, k \in N$

$$|(f-r) \chi_{E_k \setminus n_i}| \leq \mu(X)^{1/n_i} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(X)^{-1/n_j} \varphi_{n_j}(f) \leq \mu(X)^{1/n_i} \varphi_\infty(f).$$

Also ist

$$r \in \bigcap_{\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \geq 1} R_\alpha$$

und es gilt für jedes $i \in N$

$$|f - r|_{n_i} \leq \mu(X)^{1/n_i} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(X)^{-1/n_j} \varphi_{n_j}(f) \leq \mu(X)^{1/n_i} \varphi_\infty(f).$$

Daraus folgt, daß $r \in R_\infty$. Bildet man nun in der letzten Ungleichung den Limes für $i \rightarrow \infty$ (man beachte (ii)), so folgt weiter, daß

$$|f - r|_\infty \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(X)^{-1/n_j} \varphi_{n_j}(f) \leq \varphi_\infty(f).$$

Da nun in dieser Ungleichung an allen Stellen das Gleichheitszeichen stehen muß, ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Aus dem letzten Satz folgt unmittelbar: Ist $f \in L_\infty(X, \mu)$, ist $\{\alpha_n : n \in N\}$ eine Folge reeller Zahlen mit $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ und $\alpha_n \rightarrow \infty$ und ist $r_{\alpha_n} \in \phi_{\alpha_n}(f)$ für $n \in N$, dann sind alle Häufungspunkte der Folge $\{r_{\alpha_n} : n \in N\}$ in $M(X, \mu)$ Elemente von $\phi_\infty(f)$.

LITERATUR

1. B. BOEHM, Existence of best rational Tchebycheff approximations. *Pacific J. Math.* **15** (1965), 19–28.
2. E. W. CHENEY UND H. L. LOEB, On the continuity of rational approximation operators. *Arch. Rational Mech. Anal.* **21** (1966), 391–401.
3. N. DUNFORD UND J. T. SCHWARTZ, "Linear Operators", Part I: General Theory. Wiley (Interscience), New York, 1958.
4. N. V. EFIMOV UND S. B. STECHKIN, Approximative compactness and Chebychev sets. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **140** (1961) 522–524 (Russisch). Übersetzt in *Soviet Math. Dokl.* **3** (1962), 1226–1228.

5. W. KRABS, Der Pólya-Algorithmus bei nichtlinearer Annäherung von Funktionen. *Z. Angew. Math. Mech.* **45** (1965), T44–T47.
6. D. J. NEWMAN UND H. S. SHAPIRO, Approximation by generalized rational functions. In "Über Approximationstheorie" (P. L. Butzer und J. Korevaar, Hrsgb.), (*Abhandl. zur Tagung im Math. Forschungsinstitut Oberwolfach, Schwarzwald, vom 4.-10. August 1963*). Birkhäuser, Basel und Stuttgart, 1964.
7. G. PÓLYA, Sur un algorithme toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure approximation de Tchebychef pour une fonction continue quelconque. *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* **157** (1913), 840–843.
8. I. SINGER, Some remarks on approximative compactness. *Rev. Roumaine Math. Pure Appl.* **9** (1964), 167–177.
9. H. WERNER, Die Bedeutung der Normalität bei rationaler Tschebyscheff-Approximation. *Computing (Arch. Elektron. Rechnen)* **2** (1967), 34–52.